Concursul ”Quasar Cup” - Astronomie Handout 1

Ciocârlan Mihai-Bogdan, Graur Darius

Ediția 1 - Iunie 2025

1 Introducere

Mecanica cerească este un capitol din studiul astrofizicii. Aceasta are rolul de a transpune legile mecanicii clasice la scală universală, tratând analitic probleme precum orbitele și traiectoriile corpurilor în spațiu, analiza câmpurilor gravitaționale pentru corpuri cu diferite distribuții de masă și structuri.

2 Legea atracției universale

Legea atracției universale a fost prima oară formulată concret de Isaac Newton. Ea exprimă forța de atracție gravitațională dintre două mase, m și M, aflate în imponderabilitate, la o distanță r reciprocă. Această relație aduce o nouă însemnătate a masei, pe lângă cea oferită de Principiul I al Mecanicii Newtoniene, ea fiind inițial formulată ca mărimea caracteristică inerției corpurilor. Astfel, Newton i-a atribuit și semnificația de masă gravifică, caracteristică a atracției gravitaționale dintre cele două corpuri. Conform măsurătorilor actuale, cele două mase nu pot fi distinse, așadar masa în sine este atât inerțială, cât și gravifică.

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \tag{1}$$

Forța de atracție gravitațională este proporțională cu produsul maselor celor două corpuri, dar invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două.
Termenul G din relația de mai sus indică Constanta Atracției Universale, aceasta fiind prima oară măsurată de către Henry Cavendish cu ajutorul unui pendul de torsiune. Acesta a observat cum atracția dintre două bile masive afecteză unghiul de torsiune al pendulului, obținând o valoare apropiată de cea acceptată în ziua de azi.

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

3 Legile lui Kepler

Să considerăm cele două mase m și M la o distanță arbitrară inițială r_0, având viteza relativă inițială v_0. O problemă ce poate fi imediat formulată este cum arată traiectoria relativă dintre cele două corpuri în funcție de valorile parametrilor inițiali. Aflarea răspunsului implică rezolvarea ecuației diferențiale a Principiului 2 al Mecanicii Newtoniene:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

Variabila t este schimbată cu unghiul de poziție θ ales față de o direcție etalon. Rezolvarea implică identificarea anumitor mărimi constante pe parcursul mișcării, precum energia E și momentul cinetic L. Este în afara scopului lecției această demonstrație.

Concluziile acestei rezolvări sunt Legile lui Kepler în formularea lor matematică. Inițial, Kepler le-a descoperit înaintea lui Newton pe cale pur empirică, însă nu avea aparatul matematic necesar pentru a le exprima analitic. Acestea sunt:

3.1 Prima lege a lui Kepler:

Corpurile ce alcătuiesc un sistem orbital influențat doar de atracția gravitațională reciprocă vor descrie traiectorii din aceeași familie de curbe, a secțiunilor conice.

Să ne imaginăm un con dublu, simetric. Secționarea acestuia de către un plan la diferite orientări va duce la apariția unor contururi pe zona exterioară a conului ce poartă, în consecință, numele de secțiuni conice. Acestea sunt, după orientarea planului de secționare:

1. Cerc - Planul de secționare este orizontal. Cercul este secțiunea conică cu excentricitatea $e = 0$.
2. Elipsă - Planul de secționare cade în interiorul unui singur con. Elipsa este secțiunea conică cu $0 < e < 1$.
3. Parabolă - Planul de secționare este paralel cu limita exterioară a conului. Parabola este secțiunea conică cu $e = 1$.
4. Hiperbolă - Planul de secționare pătrunde ambele conuri. Hiperbola este secțiunea conică cu $1 < e$.

3.2 Legea a doua a lui Kepler:

Rata de măturare a razei vectoare a corpului de masă mică în timpul mișcării este aceeași în orice punct de pe elipsă.

Rata măturării ariei elipsei de către vectorul de poziție al corpului mic este constantă pe parcursul întregii mișcări pe traiectorie. Aceasta poartă numele de viteză areolară și se notează cu Ω. Conform definției:

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = ct. \tag{3}$$

Să exprimăm elementul de arie măturată $\mathrm{d}A$ în funcție de variația elementară a unghiului $\mathrm{d}\theta$, modulul vectorului de poziție r și de variația sa elementară $\mathrm{d}r$.

$$\mathrm{d}A = \tfrac{1}{2} r\,(r + \mathrm{d}r) \sin \mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

Înlocuind în relația (3) obținem:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{mvr}{2m} = \frac{L}{2m} \tag{4}$$

După cum am menționat anterior, momentul cinetic L este o constantă a mișcării pe elipsă. Acest fapt oferă o demonstrație simplificată pentru Legea a doua a lui Kepler.

3.3 Legea a treia a lui Kepler:

Legea a treia a lui Kepler corelează perioada orbitală P și masele celor două corpuri M și m cu semiaxa mare a orbitei, a, prin următoarea relație:

$$\frac{(M + m)\,P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} \tag{5}$$

Demonstrația acestei ecuații poate fi obținută la nivel sumar în cazul unei orbite circulare ce respectă inegalitatea $m \ll M$ prin egalarea forței gravitaționale cu cea centrifugă pentru corpul de masă neglijabilă:

$$\frac{GMm}{a^2} = m\omega^2 r \tag{6}$$

$$\omega = \tfrac{2\pi}{T}$$

4 Secțiuni conice. Ecuațiile analitice.

Să ne întoarcem la secțiunile conice. Pentru a le descrie mai bine din punct de vedere matematic, este necesar să menționăm ecuațiile lor parametrice și să discutăm parametrii lor geometrici după caz.

4.1 Parametrii geometrici și proprietăți

Principalii parametrii geometrici ai secțiunilor conice sunt:

1. Focarele - Reprezintă două puncte folosite în construcția secțiunilor conice. Elipsa și Hiperbola au două focare distincte, Cercul are focarul în centrul său, iar Parabola are unul singur. Vectorul de poziție din ecuația polară a conicelor are originea în unul dintre focare.
2. Axa mare - Reprezintă diametrul lung al elipsei. Lungimea semiaxei mari se notează cu a.
3. Axa mică - Reprezintă diametrul scurt al elipsei. Lungimea semiaxei mici se notează cu b.
4. Excentricitatea liniară - Reprezintă distanța dintre focare și centrul conicei.
5. Excentricitatea numerică - Indicator al naturii conicei și al alungirii sale. Este definită ca:
$$e = \frac{c}{a} \tag{7}$$

Diferite tipuri de conice dispun de diferiți algoritmi pentru reprezentarea grafică a acestor parametrii.

Toate secțiunile conice prezentate mai jos vor fi însoțite de următoarele proprietăți:

1. Ecuație parametrică în sistem cartezian
2. Ecuație parametrică în sistem polar
3. Proprietate geometrică
4. Proprietate optică

4.2 Cercul - $e = 0$

Ecuația parametrică a unui cerc în reper cartezian este:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{8}$$

Iar cea în coordonate polare:

$$r(\theta) = R = ct. \tag{9}$$

R reprezintă raza cercului. Excentricitatea cercului este $e = 0$.

4.3 Elipsa - $0 < e < 1$

Ecuația parametrică a unei elipse în reper cartezian este:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

Ecuația de mai jos descrie toate secțiunile conice în coordonate polare. Modulul a fost adăugat pentru a ține cont de schimbarea valorii excentricității în funcție de tipul secțiunii conice.

$$r(\theta) = \frac{a|1 - e^2|}{1 + e\cos\theta} \tag{11}$$

Proprietatea geometrică a elipsei:

Suma distanțelor dintre un punct de pe conturul său și cele două focare este constantă și egală cu $2a$.

Proprietatea optică a elipsei:

Pentru o elipsă cu suprafața interioară reflectătoare, imaginea reală a sursei aflate în unul dintre focare se va situa în celălalt focar.

4.4 Parabola - $e = 1$

Ecuația parametrică a unei parabole în reper cartezian este:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{12}$$

Ecuația în coordonate polare a parabolei ia următoarea formă:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos\theta} \tag{13}$$

Proprietatea geometrică a parabolei:

Dreapta directoare și focarul sunt elementele de construcție ale fiecărei parabole. Orice punct de pe conturul parabolei va fi la distanțe egale de dreapta directoare și de focar.

Proprietatea optică a parabolei:

Pentru o parabolă cu suprafața interioară reflectătoare, imaginea sursei aflate în focar se va forma la infinit.

4.5 Hiperbola - $1 < e$

Ecuația parametrică a unei hiperbole în reper cartezian este:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

Proprietatea geometrică a hiperbolei:

Modulul diferenței distanțelor dintre un punct de pe conturul său și cele două focare este constantă și egală cu $2a$.

Proprietatea optică a hiperbolei:

Pentru o hiperbolă cu suprafața interioară reflectătoare, imaginea virtuală a sursei aflate în unul dintre focare se va situa în celălalt focar.

5 Constantele mișcării orbitale

În rezolvarea ecuației (2) remarcăm anumite mărimi constante în cazul mișcării orbitale. Printre acestea, cele mai importante sunt momentul cinetic L și energia orbitală E care posedă formule utile în cazul fiecărei secțiuni conice.

5.1 Momentul Cinetic

Momentul cinetic se definește ca:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{15}$$

Derivând momentul cinetic în funcție de timp ajungem la teorema de variație a momentului cinetic:

$$\frac{\dot{\mathbf{L}}}{m} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{a} \tag{16}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_{tot} \tag{17}$$

Cum $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$, ajungem la:

$$\dot{\mathbf{L}} = 0, \mathbf{L} = \mathbf{ct} \tag{18}$$

Cum vectorul moment cinetic este perpendicular pe planul orbital, faptul că acesta este constant implică invarianța planului orbital al celor două corpuri.

Momentul cinetic pe orbită poate fi scris ca:

$$L = m\sqrt{GMp} = m\sqrt{GMa|1 - e^2|} \tag{19}$$

$$L = mr_{min}v_{max} = mr_{max}v_{min} \tag{20}$$

În cazul orbitelor hiperbolice, unde viteza asimptotică (la infinit) a corpurilor poartă numele de *exces hiperbolic* v_∞, iar piciorul perpendicularei pe asimptote relativ la focar este *parametrul de impact* b, momentul cinetic capătă forma:

$$L = mv_\infty b \tag{21}$$

5.2 Energia orbitală

Energia orbitală este o constantă întrucât nu avem forțe exterioare care să facă lucru asupra sistemului nostru de corpuri cerești.

Energia pe secțiunea conică poate fi exprimată util în funcție de parametrii orbitali astfel:

$$E = -\frac{GmM}{2a} \tag{22}$$

$$E = -\frac{GmM}{r_{min}} + \frac{1}{2}mv_{max}^2 = -\frac{GmM}{r_{max}} + \frac{1}{2}mv_{min}^2 \tag{23}$$

De unde se poate extrage relația pentru v_{min} și v_{max}.

Remarcăm faptul că:

1. $E < 0$ pentru orbite circulare și eliptice.
2. $E = 0$ pentru orbite parabolice.
3. $E > 0$ pentru orbite hiperbolice.

Ceea ce corespunde naturii de curbe închise/deschise ale diferitelor secțiuni conice.

Pentru traiectoriile hiperbolice mai putem scrie:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 \tag{24}$$

6 Viteze cosmice

Caracteristica generală a transferurilor orbitale este dată de diferența de viteză pe care o navă trebuie să o obțină pentru a îndeplini sarcina transferului. Anumite transferuri specifice implică folosirea anumitor viteze standardizate cu denumirea de *viteze cosmice*.

6.1 Prima viteză cosmică

Prima viteză cosmică reprezintă viteza necesară unei rachete ca după lansarea de pe Pământ să se înscrie pe o orbită circulară de rază minimă în jurul acestuia.

Pentru a demonstra relația acesteia exprimăm energia totală de pe traiectoria circulară cu raza R_P prin componenta ei cinetică și cea potențială gravitațională, iar după ne folosim de relația (22):

$$E = -\frac{GmM_P}{R_P} + \frac{1}{2}mv_I^2 = -\frac{GmM_P}{2R_P} \tag{25}$$

Prin efectuarea calculelor ajungem la:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_P}{R_P}} \tag{26}$$

6.2 A doua viteză cosmică

A doua viteză cosmică reprezintă viteza necesară unei rachete ca după lansarea de pe Pământ să evadeze din câmpul gravitațional al acestuia, adică să se înscrie pe o traiectorie parabolică.

Pentru a demonstra relația acesteia exprimăm energia totală de pe traiectoria parabolică cu apropierea minimă R_P prin componenta ei cinetică și cea potențială gravitațională, iar după ne folosim de faptul că energia pe traiectoria liberă (parabolică) e nulă:

$$E = -\frac{GmM_P}{R_P} + \frac{1}{2}mv_{II}^2 = 0 \tag{27}$$

Prin efectuarea calculelor ajungem la:

$$v_I = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} \tag{28}$$

6.3 A treia viteză cosmică

A treia viteză cosmică reprezintă viteza necesară unei rachete ca după lansarea de pe Pământ să evadeze din câmpul gravitațional al Soarelui, adică să se înscrie pe o traiectorie parabolică relativ la Soare, scăpând din Sistemul Solar.

Pentru a demonstra relația acesteia considerăm raza Pământului R_P, masa sa M_P, viteza sa în jurul Soarelui v_P, iar proprietățile Soarelui sunt R_S și M_S. Considerăm că raza orbitei Pământului în jurul soarelui este a.

Rezolvarea constă în scrierea energiei rachetei relativ la Pământ în timp ce se află în câmpul gravitațional al acestuia, care îi dă termenul potențial $-\frac{GmM_P}{R_P}$ față de care are viteza inițială v_{III}, și după ieșirea din câmpul Pământului, când relativ la Pământ are viteza $v_{/P} = \sqrt{\frac{2GM_S}{a}} - v_P$ necesară înscrierii pe o orbită parabolică relativ la Soare. Astfel, aspectele importante sunt reprezentate de scrierea termenilor corespunzători în egalitatea energiilor din cele două stări ținând cont că sistemul de referință rămâne același, cel al Pământului, iar că energia potențială gravitațională a Soarelui apare în ambele părți ale egalității.

$$E_{/P} = \frac{1}{2}mv_{III}^2 + E_{pg}^P + E_{pg}^S = \frac{1}{2}mv_{/P}^2 + E_{pg}^S \tag{29}$$

Prin înlocuirea termenilor ajungem la:

$$\frac{1}{2}mv_{III}^2 - \frac{GmM_P}{R_P} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2GM_S}{a} - v_P^2\right) \tag{30}$$

Prin simplificarea lui $\frac{m}{2}$ și identificarea celei de-a doua viteze cosmice a Pământului, ajungem la rezultatul final:

$$v_{III} = \sqrt{v_{II}^2 + v_P^2 \left(\sqrt{2} - 1\right)^2} \tag{31}$$

7 Transferuri orbitale

Transferurile orbitale reprezintă diferite manevre de modificare a orbitei unei nave. Parametrul important al transferurilor orbitale este diferența dintre viteza inițială și cea finală.

$$\Delta v = |v_f - v_i| \tag{32}$$

Cel mai întâlnit transfer este *Transferul Hoffmann* care reprezintă trecerea de la o orbită circulară de rază a_1 la una superioară cu raza a_2 printr-o orbită de transfer cu periheliul în dreptul orbitei 1, iar cu afeliul în dreptul orbitei 2.

$$\Delta v_1 = v_{max} - v_i \tag{33}$$

Unde putem identifica termenii v_{max}, v_i considerând masa corpului masiv M, semiaxa orbitei de transfer $a = \frac{a_1+a_2}{2}$:

$$v_i = \sqrt{\frac{GM}{a_1}} \tag{34}$$

$$v_{max} = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right)} \tag{35}$$

Iar în cazul celei de-a două manevre avem:

$$\Delta v_2 = v_f - v_{min} \tag{36}$$

Unde termenii v_{max} și v_f se identifică astfel:

$$v_f = \sqrt{\frac{GM}{a_2}} \tag{37}$$

$$v_{max} = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right)} \tag{38}$$

8 Legea lui Gauss

Legea lui Gauss este una din ecuațiile lui Maxwell, fiind o lege prezentă, de obicei, în electromagnetism care afirmă că fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă este proporțional cu sarcina electrică din interiorul acesteia, coeficientul de proportionalitate fiind $\frac{1}{\varepsilon_0}$. Datorită similarității câmpului electric cu cel gravitațional prin natura conservativă și de proporționalitate cu r^{-2}

a forțelor, aceasta poate fi utilizată pentru ambele câmpuri, având ca diferență doar coeficientul de proporționalitate și schimbarea sarcinii în masă.

Enunțul complet al Teoremei Gauss este următorul:

$$\Phi = \oiint \mathbf{\Gamma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -4\pi G m_{int} \tag{39}$$

Mărimea $\mathbf{\Gamma}$ reprezintă intensitatea câmpului gravitațional asupra corpului de masă m, sub acțiunea forței $\mathbf{F_g}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{40}$$

Mărimea $\mathrm{d}\Phi = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ reprezintă fluxul elementar al câmpului gravitațional prin unitatea de suprafață a Gaussienei. Gaussienele reprezintă familia de suprafețe închise de potențial egal pentru o distribuție de masă $m(r)$. Pentru distribuții de masă sferice $\rho(r)$ masa m_{int} interioară Gaussienei la nivelul căreia vrem să calculăm câmpul este aflată astfel:

$$m_{int} = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\left(r\right) \mathrm{d}r \tag{41}$$

Iar rezultatul integralei de suprafață a fluxului se traduce ca:

$$\Phi = 4\pi \Gamma\left(r\right) r^2 \tag{42}$$

Potențialul se definește ca lucrul mecanic specific (împărțit la masă) necesar aducerii corpului de la infinit până la poziția $\mathbf{r}$. Intensitatea câmpului gravitațional reprezintă negativul gradientului potențialului:

$$\mathbf{\Gamma} = -\nabla V \tag{43}$$

Iar în cazul unei distribuții sferice de masă avem:

$$\mathbf{\Gamma} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \tag{44}$$

9 Aflarea de arii de sub diverse curbe

Integrala are ca semnificație fizică aria dintre graficul unei funcții $y(x)$ și axa absciselor Ox. De multe ori, mai ales în scopul aplicării Legii a doua a lui Kepler, este nevoie să aflăm aria de sub diverse curbe, precum parabole.

Procedeul de determinare implică alegerea unui referențial potrivit, de obicei cu axa Oy coincidentă cu axa de simetrie a curbei. După stabilirea ecuației $y(x)$, aplicarea următoarei integrale între limitele indicate în desen, pentru o curbă simetrică, ne va duce la aria de sub graficul dependenței analizate:

$$S = \int_{-a}^{a} y\left(x\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^a y\left(x\right) \mathrm{d}x \tag{45}$$